

Adı Soyadı:  
Numarası:

03.03.2023

## 2022-2023 SOYUT MATEMATİK I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1)(10p)  $q' \Leftrightarrow r'$  önermesini en sade hale getiriniz.

2)(10p) a)Kartezyen kümesinin fark kümesi üzerine sol dağılma özelliğinin olup olmadığını araştırınız.

(15p)b)  $K, L, M$  üç küme olmak üzere

$$(L - K) \cap [(L \cap K) \cup (L - M)] = L - (K \cup M)$$

olduğunu **küme özelliklerinden faydalanarak** gösteriniz.

3)(17p) a)  $C = \{(2,1), (5,3), (6,4), (10,6), (12,7), (30,8), (35,10), (60,12)\}$

kümesi üzerinde ' $\gamma$ ' bağıntısı ' $(m, n), (k, l) \in C$  için  $(m, n) \gamma (k, l) \Leftrightarrow (m|k)$  veya  $n \leq l$ ' şeklinde veriliyor.  $(C, \gamma)$  kısmi sıralı bir küme olduğuna göre  $\text{Max } C$ ,  $\text{Min } C$ ,  $\text{EBE } C$ ,  $\text{EKE } C$ ,  $\text{Sup } C$  ve  $\text{Inf } C$ 'yi bulunuz.

(18p) b)  $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$  ve  $B = \{x, y, z\}$  kümeleri ve  $f = \{(2, y), (3, y), (4, z), (5, z), (6, x), (7, y), (8, y), (9, x), (10, x), (11, y)\}$  fonksiyonu veriliyor. Bu durumda ' $\beta$ ' bağıntısı  $\beta = \{(a, b) : a \in A, b \in A \text{ ve } f(a) = f(b)\}$  ile tanımlandığına göre  $A$  kümesinde tanımlı  $\beta$  bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve 2, 4 ve 6 elemanlarının denklik sınıflarını bulunuz.

4) (10p)  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu sabit bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonu hangi durumda birebir ve örten olur? Açıklayınız

5)(20p)  $N = \{\frac{1+2t}{1+2u} : t, u \in Z\}$  olsun.  $N$  kümesinin rasyonel sayılarda tanımlı çarpma işlemine göre kapalı ve iyi tanımlı olduğu bilindiğine göre  $N$ 'nin bu işleme göre bir grup olup olmadığını araştırınız.

**Başarılar**  
**Dr. Çağla Çelemoğlu**

## Cevap Anlatım

$$\begin{aligned} 1) \quad q' \Leftrightarrow r' &\equiv (q' \Rightarrow r') \wedge (r' \Rightarrow q') \\ &\equiv (q \vee r') \wedge (r \vee q') \\ &\equiv (r' \vee q) \wedge (q' \vee r) \\ &\equiv (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \\ &\equiv (r \Leftrightarrow q) \end{aligned}$$

$$2) \quad a) \quad A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

olup olmadığına bakalım.

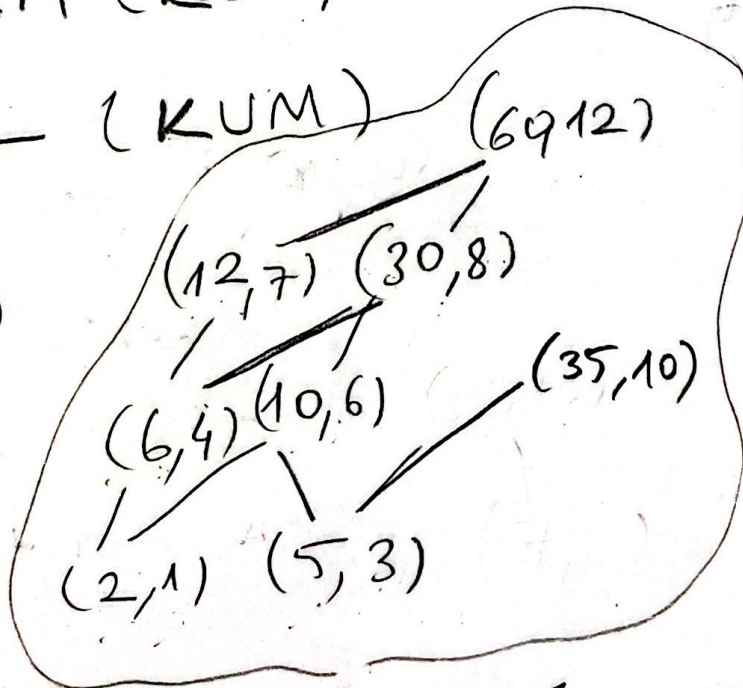
Çözüm: Keyfi bir  $(x, y) \in A \times (B - C)$  alalım.

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B - C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \end{aligned}$$

eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
b) & (L-K) \cap [(L \cap K) \cup (L-M)] \\
&= (L \cap K') \cap [(L \cap K) \cup (L \cap M')] \\
&= (L \cap K') \cap [L \cap (K \cup M')] \\
&= L \cap [K' \cap (K \cup M')] \\
&= L \cap [(K' \cap K) \cup (K' \cap M')] \\
&= L \cap [\emptyset \cup (K \cup M)'] \\
&= L \cap (K \cup M)' \\
&= L - (K \cup M)
\end{aligned}$$

3) a)



$$\text{Max } A = \{(35,10), (60,12)\}$$

$$\text{Min } A = \{(2,1), (5,3)\}$$

EBE A yoktur, EICE A yoktur

$$\text{Sup } A = (420,12)$$

$$\text{Inf } A = (1,1)$$



3 b) Yansima :  $\forall a \in A$  i $\in$ m  $(a, a) \in \beta$  olur mu?  
 $\forall a \in A$  i $\in$ m  $f(a) = f(a)$  old.  $(a, a) \in \beta$  oldu $\nu$   
 a $\nu$ iktir.

Simetri :  $(a, b) \in \beta \Rightarrow (b, a) \in \beta$  olur mu?  
 $f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a)$  old. simetri

so $\nu$ planır

Ge $\nu$ isme :  $(a, b) \in \beta \wedge (b, c) \in \beta \Rightarrow (a, c) \in \beta$   
 olur mu?

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) \in \beta \Rightarrow f(a) = f(b) \\ (b, c) \in \beta \Rightarrow f(b) = f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in \beta$$

0 kade  $\beta$  bir denklik ba $\nu$ antisidir

$$\begin{aligned} \bar{2} &= \{ a \in A \mid (a, 2) \in \beta \} = \{ a \in A \mid f(a) = f(2) \} \\ &= \{ a \in A \mid f(a) = y \} \\ &= \{ 2, 3, 7, 8, 11 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{4} &= \{ b \in A \mid (a, 3) \in \beta \} = \{ b \in A \mid f(b) = f(3) \} \\ &= \{ b \in A \mid f(b) = z \} \\ &= \{ 4, 5 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{6} &= \{ c \in A \mid f(c) = f(4) \} = \{ c \in A \mid f(c) = x \} \\ &= \{ 6, 9, 10 \} \end{aligned}$$



4)  $f: A \rightarrow B$  sabit fonksiyon ise  $\forall a \in A$ .

İçin  $f(a) = b$  biçiminde tanımlıdır.

Bu durumda  $f$ 'nin örten olması için  $B = \{b\}$  olmalıdır. Yani  $B$  kümesi tek elemanlı ise  $f$  öttendir.

$f$ 'nin birebir olması için ise  $A = \{a\}$  olmalıdır. Yani  $A$  kümesi tek elemanlı ise  $f$  birebirdir.

5) Birleşme öz.

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}$  için  $x = \frac{2m+1}{2n+1}, y = \frac{2k+1}{2l+1}, z = \frac{2u+1}{2v+1}$

$$(x \cdot y) \cdot z = \left( \frac{2m+1}{2n+1} \cdot \frac{2k+1}{2l+1} \right) \cdot \left( \frac{2u+1}{2v+1} \right)$$

$$= \left( \frac{(2m+1)(2k+1)}{(2n+1)(2l+1)} \right) \cdot \left( \frac{2u+1}{2v+1} \right)$$

$$= \frac{2m+1}{2n+1} \cdot \left( \frac{(2k+1)(2u+1)}{(2l+1)(2v+1)} \right) = x \cdot (y \cdot z)$$

olup birleşme öz. sayıları

Birim eleman öz.  $\forall x \in \mathbb{N}$  için deşme öz. var old.  $x \cdot e = x$  öz. bir  $e \in \mathbb{N}$  var mıdır?

$$\frac{2m+1}{2n+1} \cdot e = \frac{2m+1}{2n+1} \text{ old. } e = 1 = \frac{2 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 + 1} \in \mathbb{N}$$

old. birim eleman vardır ve 1 dir

Tes eleman ög :  $\forall x \in \mathbb{N}$  için

$x \cdot x^{-1} = 1$  oş  $\exists x^{-1} \in \mathbb{N}$  var mıdır?

$$x = \frac{2m+1}{2n+1} \text{ alırsa } \frac{2m+1}{2n+1} x^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow x^{-1} = \frac{2n+1}{2m+1} \in \mathbb{N}$$

bulunur. Yani  $\mathbb{N}$  bu işleme göre bir  
grup tur.